NOVEMBRO | 2019 EDIÇÃO Nº 9

ARTICULAÇÃO

MATEMÁTICA

Nesta edição falaremos sobre estudiosos, matemática, dificuldade, impossibilidade e superação.

A impossibilidade matemática

Roberto Imbuzeiro Oliveira

I. Um passatempo que faz muito tempo passar

Proponho um jogo de paciência. Começa com quadrados em branco dispostos em cinco colunas, como na figura 1 abaixo. De início, esses quadrados estão vazios. Ao longo do jogo, você preencherá alguns desses quadrados com um X, e estes passarão a ser chamados de marcados.

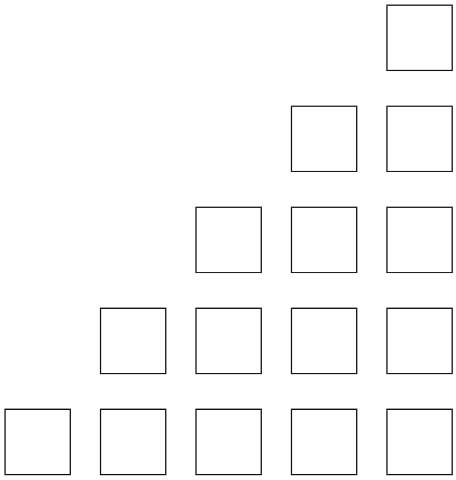


Figura 1: Os quadrados do jogo. Repare que há cinco colunas, contendo 1, 2, 3, 4 e 5 quadradinhos.

Em cada rodada, você deve escolher duas colunas e marcar quadrados vazios nas duas colunas, sempre em igual número. Por exemplo, se uma coluna tem dois quadrados vazios e outra tem quatro, então você pode marcar um ou dois quadrados vazios em cada uma dessas duas colunas. As figuras abaixo ilustram o que pode acontecer nas duas primeiras jogadas.

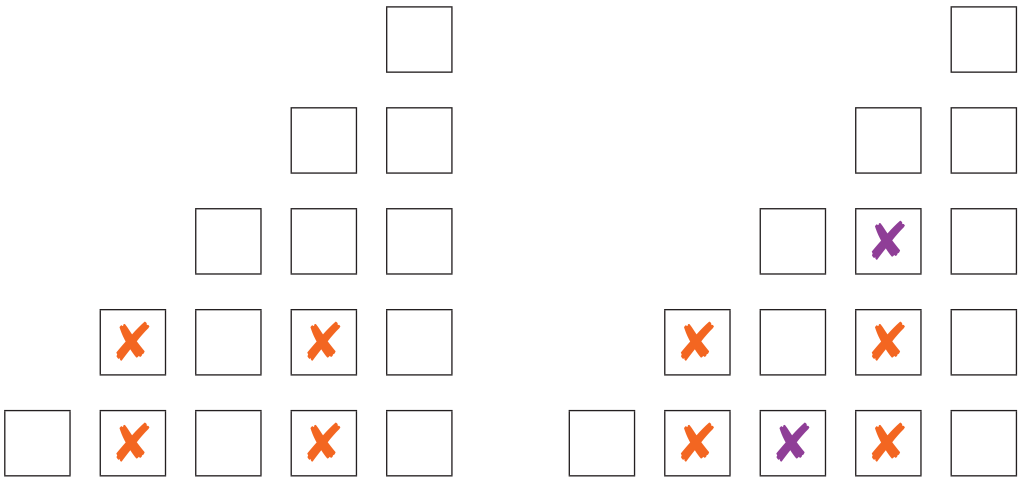


Figura 2: Uma sucessão de jogadas. Na primeira, foram marcados dois *X* nas colunas 2 e 4 (da esquerda para a direita). Na segunda jogada, marcamos um quadrado vazio em cada uma das colunas 3 e 4.

O jogo termina ou quando todos os quadrados estão marcados ou quando só houver uma coluna ainda com quadrados vazios. Você ganha se todos os quadrados forem marcados e perde em caso contrário. Espero que se arrisque a jogar este jogo e se empenhe para ganhar antes de seguir a leitura.

Conheci este jogo (ou melhor, uma variante dele) no livro *Iniciação à Matemática*: um curso com problemas e soluções, dos professores

Krerley Oliveira (da Universidade Federal de Alagoas) e Adán Corcho (da Universidade Federal do Rio de Janeiro), editado pela Sociedade Brasileira de Matemática. É um ótimo passatempo, na melhor acepção da palavra. Digo isso pelo seguinte: pode passar o tempo que for; você pode tentar quantas vezes quiser, que ainda assim não vai conseguir vencer. É matematicamente impossível ganhar o jogo!

II. O drama da impossibilidade

[...]

Pensar que algumas coisas são impossíveis pode ser meio desanimador. Por exemplo, se um parente seu está desenganado pelos médicos, pode ser alentador ouvir que "nada é impossível". A diferença entre este caso e o jogo acima é que a Medicina não é exata: sempre há espaço para o inesperado ou até para um milagre. Já a Matemática é diferente. [...]

Para botar mais lenha na fogueira, [...] poderia dizer que conseguiu ganhar com um número maior de quadrados a serem preenchidos, como na figura 3 abaixo. Se com mais é possível, por que não seria com menos?

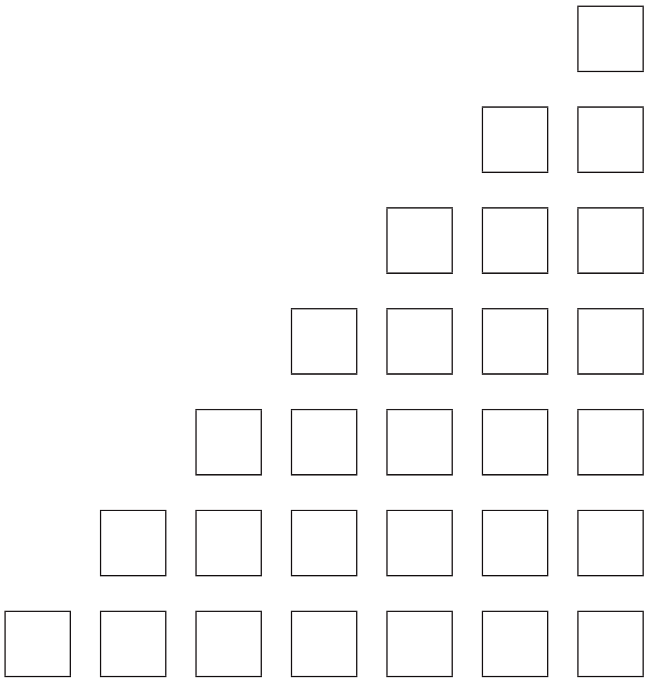


Figura 3: O jogo começa com 7 colunas, preenchidas com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 quadrados. Neste caso, é possível ganhar o jogo. Você consegue descobrir como?

Neste caso, meu problema não é psicológico e sim lógico. [...]

III. O impossível na história da Matemática

Todos conhecemos teoremas como o de Pitágoras, que nos permitem fazer ou calcular alguma coisa. Há, no entanto, uma série de resultados matemáticos que se parecem com o meu problema acima: eles falam do que não se pode fazer ou calcular.

Por exemplo, é sabido desde os gregos antigos que o número raiz de dois não pode ser escrito como uma fração: isto é, ele não é a razão de dois números inteiros. O mesmo vale para o número pi – a razão entre perímetro e diâmetro da circunferência –, mas isso só foi demonstrado pelo suíço Johann Henirich Lambert (1728–1777).

A “fórmula de Bhaskara”, muito antiga, nos permite resolver equações do segundo grau em uma variável. Há fórmulas mais recentes para resolver equações de terceiro e quarto grau em termos das operações básicas e de raízes ou radicais (quadradas, cúbicas ou de ordem maior). Por muito tempo, tentou-se achar uma fórmula para equações do quinto grau, até que o matemático norueguês Neils Heinrik Abel (1802-1829) provou que isto era impossível. O francês Évariste Galois (1811-1832) foi mais longe e deu uma receita para descobrir que equações podem ser resolvidas por radicais.

Já no século 20, o austríaco Kurt Gödel (1906-1978) mostrou que há afirmações matemáticas verdadeiras, mas impossíveis de se demonstrar. O inglês Alan Turing (1912-1954), que inventou a Teoria da Computação a partir dos trabalhos de Gödel, mostrou resultados variados a partir disso: por exemplo, não é possível fazer um programa de computador que funcione como antivírus universal.

Questões de impossibilidade foram e continuam sendo muito importantes para os matemáticos. Em alguns casos, como o de Turing, descobertas deste tipo têm importância prática direta. Em outros, como o de Galois, provar a impossibilidade levou a uma revolução da Matemática pura, que só muito depois desembocou em aplicações (por exemplo, a segurança das compras *on-line* é baseadas na Teoria de Grupos que Galois criou). Em todos os casos, quando os matemáticos provam que algo é impossível, isso não é motivo para choro, e sim para se desbravarem novos caminhos.

IV. De volta ao jogo: a ideia de invariante

[...] O jogo dos quadradinhos era apenas um pretexto para falar de impossibilidades. No entanto nosso pequeno drama persiste: como eu posso provar que é impossível preencher todos os quadrados?

A razão é simples. Primeiro, observe que o número total de quadrados no jogo é 15, ímpar. O que mostrarei a seguir é que o número de quadrados marcados ao longo do jogo é sempre par. Desta forma, nunca será possível marcar todos os quadrados.

Como sabemos que o número de preenchidos é sempre par? Quando o jogo começa, isso é evidente: há 0 quadrados preenchidos! Na rodada seguinte, preencho o mesmo número de quadrados em duas colunas diferentes. Portanto, o número de quadrados que preencho é o dobro de algum número inteiro. A conclusão é que este número é par.

Nas rodadas seguintes, o mesmo raciocínio mostra que preencherei um número par de quadrados. Portanto, a soma do número de preenchimentos ao longo das rodadas é sempre uma soma de pares. Como a soma de pares é par, isso quer dizer que a soma — o total de quadrados preenchidos — é sempre par, como afirmei acima. Por isso, nunca conseguiremos preencher os 15 quadrados!

A ideia que usei foi buscar um invariante: ou seja, algo que não muda à medida que “mexo no jogo” de acordo com as regras. Essa ideia é fundamental para vários problemas de impossibilidade. Na verdade, para o nosso jogo essa ideia é perfeita. Pode-se demonstrar que é possível preencher todos os quadrados se e somente se a soma é par. É por isso que você pode ganhar o jogo no caso da figura 3 acima. Por que não tentar agora, já que desta vez você sabe que é possível?

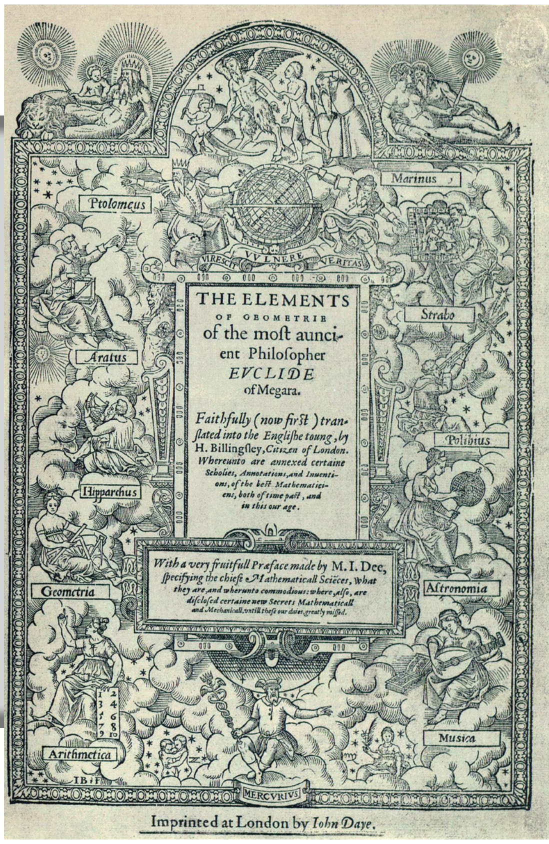
OLIVEIRA, Roberto Imbuzeiro. A impossibilidade matemática. **Ciência & Matemática — O GLOBO**: 12 set. 2019. Disponível em: <https://blogs.oglobo.globo.com/ciencia-matematica/post/impossibilidade-matematica.html>. Acesso em: 23 set. 2019.

Impossível ou difícil?

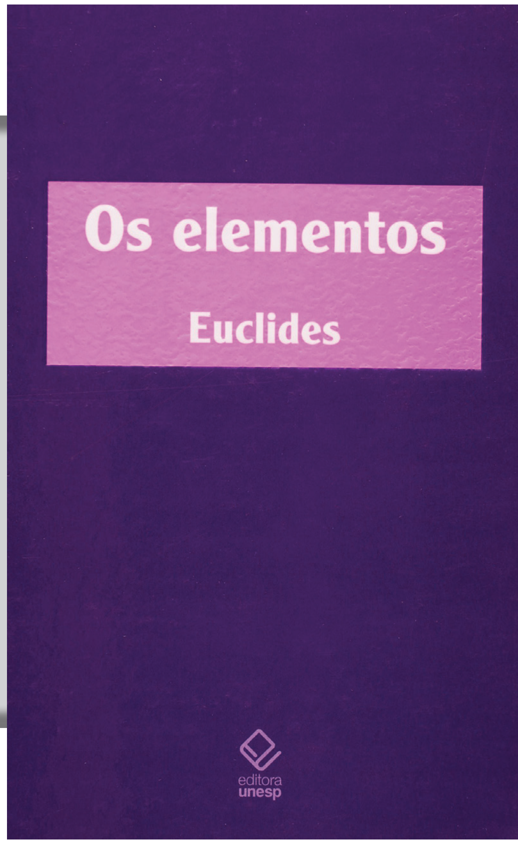
Rafael da Gama Cavallari

A Matemática oferece diversos tipos de problemas. Alguns podem até parecer simples, mas se revelam difíceis e, muitas vezes, impossíveis. Para exemplificar isto, olhemos para a Geometria.

A Geometria que estudamos no Ensino Médio foi estruturada a partir do trabalho de Euclides de Alexandria, daí o nome *Geometria euclidiana*. Ele formalizou os axiomas, as definições, as proposições, os teoremas e as construções da Geometria em seu famoso livro chamado *Os elementos de Euclides*, de 300 a.C.



Folha de rosto da edição do livro *Os elementos de Euclides*, de 1570, feita por Sir Henry Billingsleyh. Essa obra é composta de 13 livros em que se demonstram 465 proposições referentes à Geometria euclidiana, a da régua e do compasso, e à Geometria aritmética.



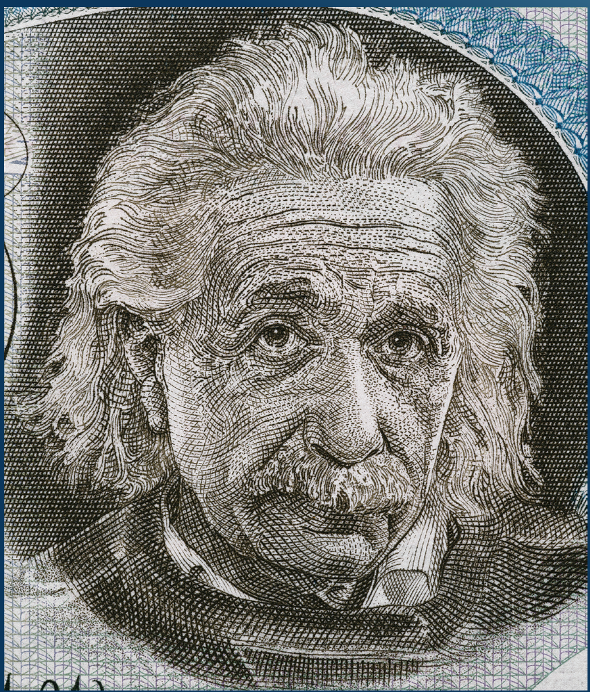
Capa da primeira tradução completa para o português da obra de Euclides feita a partir do texto grego.

Durante muitos anos, parecia impossível que houvesse outras concepções que não fossem as de Euclides. Porém, os matemáticos modernos Nikolái Lobachevski, Jànos Bolyai e Bernard Riemann exploraram novas maneiras de enxergar a Geometria e a realidade, negando algumas ideias de Euclides, e desenvolvendo assim o que chamamos de *Geometria não euclidiana*. As descobertas desses matemáticos foram aparentemente tão peculiares que pareciam ir contra a realidade por envolverem estruturas geométricas muito difíceis de serem concebidas, tanto teórica quanto visualmente, em relação ao que era conhecido até então.

O estudo da realidade não é apenas feito na Matemática. Podemos encontrar estudos desse tipo na Física, por exemplo.

Isaac Newton, conhecido como o pai da Física, também era matemático e fez importantes estudos dentro da ciência. O seu trabalho é base fundamental para a Física como a conhecemos hoje e impactou muito nas produções e nas descobertas posteriores da ciência, assim como aconteceu com Euclides. Por muito tempo, pensou-se ser impossível que alguém seria capaz de relatar teorias que pudessem contradizer Newton.

Retrato de Isaac Newton.



Até que Albert Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade, mostrando que a teoria de Newton era boa para uma parte da Física, quando o estudo era feito para objetos que alcançavam velocidades relativamente pequenas. Já em sistemas que envolviam velocidades maiores, as regras newtonianas não valiam mais.

Retrato de Albert Einstein.

Uma coisa surpreendente é que Einsten, para desenvolver sua teoria, percebeu que precisava calcar seus modelos e experiências na Geometria não euclidiana, uma vez que a Geometria euclidiana não se adaptava às novas estruturas físicas encontradas. E as atuais comprovações da Teoria da Relatividade têm confirmado isto: o Universo não pode ser explicado apenas a partir do modelo euclidiano. Assim, as regras de Euclides não servem para explicar completamente o funcionamento do nosso Universo.

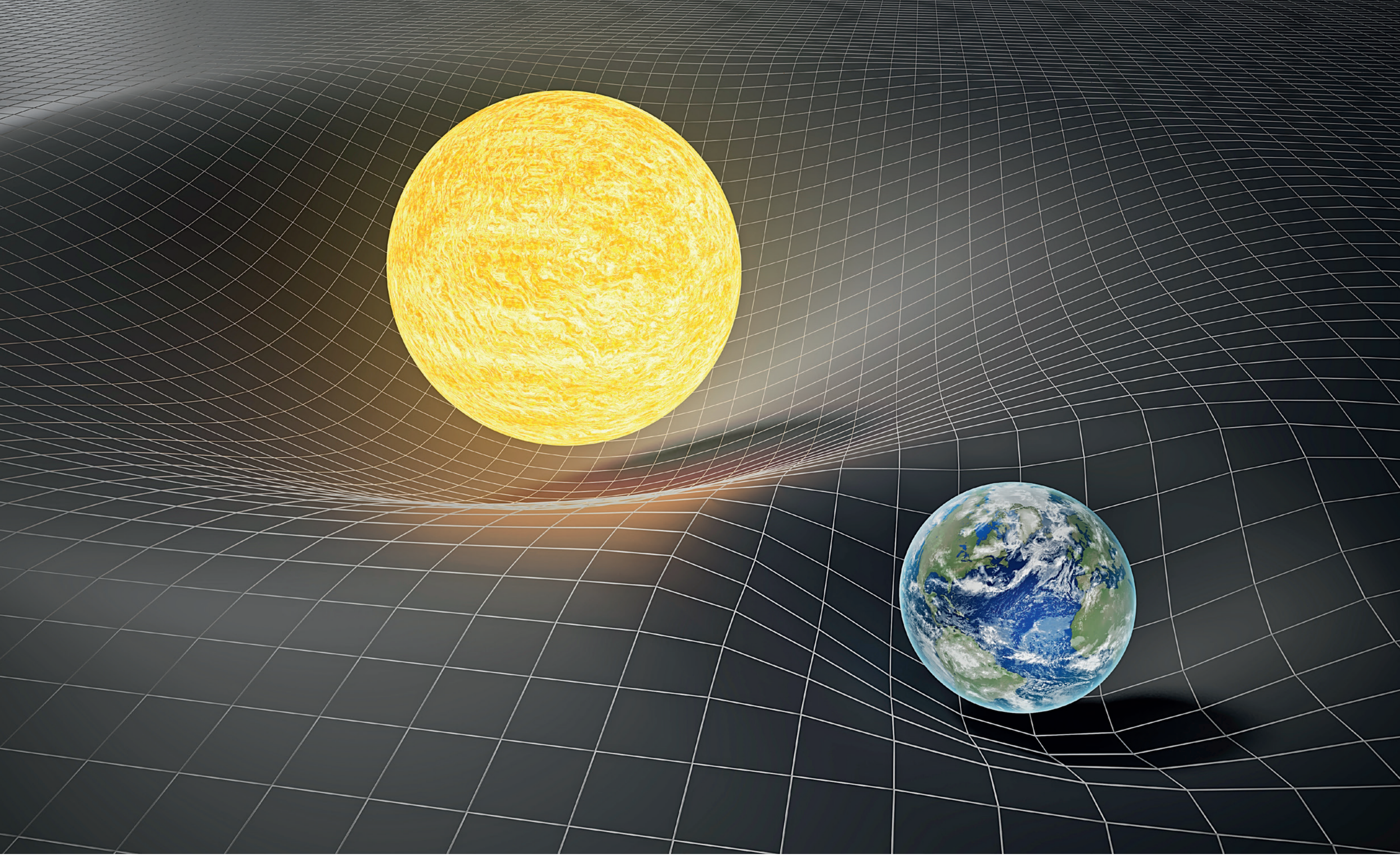


Imagem sem escala do Sol e da Terra distorcendo o espaço-tempo por causa de suas forças gravitacionais. O esquema baseia-se na Teoria da Relatividade proposta por Einsten, que diz que o tempo não passa da mesma forma para observadores diferentes, dependendo da velocidade, da gravidade e do espaço do sistema em que eles estão localizados.

Einstein não fez todo esse trabalho sozinho. Por exemplo, as equações que utilizou no início de sua teoria foram desenvolvidas por Hendrik Lorentz. Para concluir seu trabalho, ele teve ajuda do matemático suíço Marcel Grossmann.

Ele tinha consciência da dificuldade que era desenvolver as suas teorias, tanto que costumava dizer para as pessoas que elas não deveriam se preocupar com as dúvidas em Matemática, pois ele garantia que tinha as dele.

Outra personalidade que impactou bastante as ideias de Einsten foi seu grande amigo Kurt Gödel. Era comum vê-los caminhando e conversando pelas calçadas de Princeton. Gödel foi um dos filósofos mais importantes da História: ele trabalhou diretamente com as bases da matemática, que chamamos de axiomas, mostrando que existem problemas cuja solução é impossível. Seu teorema mais famoso é o Teorema da Incompletude, sendo considerado uma das maiores descobertas científicas dos últimos tempos.

Para entender como esse teorema funciona, há um exemplo conhecido como Paradoxo do mentiroso. Para tanto, pense um pouco na frase "Estou mentindo agora!".

Se a frase for verdadeira, então, eu estou mentindo. Mas, se eu estou mentindo, então, a frase não é verdadeira. Agora, se a frase não for verdadeira, então, eu não estou mentindo. Mas, se não estou mentindo, então a frase é verdadeira. Note que, em ambos os casos, não podemos dizer que a frase é verdadeira ou falsa. Esse é um exemplo de um problema de lógica sem solução, uma situação impossível de ser resolvida.

Da mesma forma, o teorema criado por Gödel ironicamente utiliza a matemática para dizer que a matemática não consegue resolver tudo. Em outras palavras, ele mostrou que realmente existem problemas que a matemática não pode resolver. A frase "Estou mentindo agora!" é um desses problemas. E isto gerou um incômodo gigante para os matemáticos.

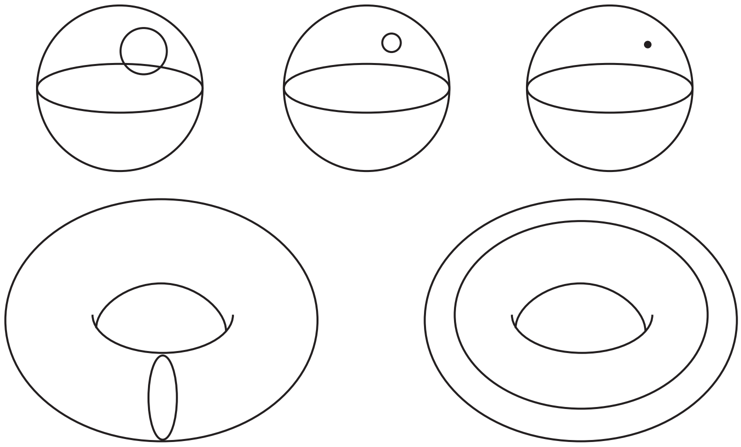
Pense em um problema difícil. De acordo com Gödel, o problema pode não apenas ser difícil, como não ter solução. Dessa forma, como saber se esse problema tem ou não tem solução?

Se o seu cérebro encontrou dificuldades ao ler isso, não se preocupe, é um assunto que exige tempo de reflexão.

Muitos desafios dentro da Matemática são problemas para os quais não se sabe se existe solução ou não, de modo que há prêmios milionários para quem solucionar desafios desse tipo.

No ano 2000, o *Clay Institute of Mathematics* lançou sete desafios para serem resolvidos pela Matemática, oferecendo um prêmio de um milhão de dólares por problema resolvido. Os desafios envolvem computação, geometria, funções, números complexos, teoria dos fluidos e mecânica quântica. Até agora, apenas um dos problemas foi resolvido. O matemático russo Grigori Perelman encontrou a solução para a conjectura de Poincaré, mas, por motivos particulares, recusou o prêmio milionário.

Antes de entender a conjectura de Poincaré, observe a imagem abaixo.



Representação das superfícies de uma esfera e de um toro com circunferências desenhadas.

Na imagem, temos as superfícies de uma esfera e de um toro, figuras geométricas de 2 dimensões, mesmo que os sólidos sejam de 3 dimensões. Neles, temos desenhadas circunferências, também de 2 dimensões. Na superfície da esfera, essa circunferência vai se fechando até se tornar um ponto, porém, na superfície do toro, não é possível realizar o mesmo. Isto implica que qualquer que seja a deformação que façamos na superfície do toro, sem rasgá-la, cortá-la ou colá-la, nunca será possível chegar em uma figura que não tenha um furo em sua forma.

A Conjectura de Poincaré basicamente baseia-se no mesmo pensamento, porém para uma superfície de 3 dimensões. Para isso, é necessário que o sólido tenha 4 dimensões, o que impossibilita visualizá-lo.

Além dos desafios citados anteriormente, existe outro problema que se tornou bastante interessante na Matemática e ele envolve um juiz e uma criança, separados por mais de 300 anos.

Se você já estudou Geometria analítica, talvez saiba que seus criadores foram o filósofo René Descartes e um juiz francês chamado Pierre de Fermat, que influenciou o desenvolvimento da Geometria não euclidiana e teve seus métodos adaptados a partir disso.

Pierre de Fermat.

Fermat tinha por hábito fazer anotações matemáticas em seus livros de estudo, e uma dessas notas era uma fórmula parecida com o Teorema de Pitágoras. Essa fórmula relacionava-se com um enunciado para o qual Fermat afirmou que possuía a demonstração, mas que, como a margem do livro no qual havia feito a anotação não tinha espaço suficiente, ele não pode explicitá-la. Resultado: após sua morte, em 1665, ninguém sabia se sua observação era verdadeira ou falsa, ficando conhecida como "O último teorema de Fermat".

O teorema amplia a fórmula do Teorema de Pitágoras e diz que, para a expressão $x^n + y^n = z^n$, não existem x, y e z inteiros maiores que 0 que satisfazem a equação, se n for um inteiro maior que 2.

Durante mais de 300 anos, diversos matemáticos tentaram demonstrar a validade do teorema. Todos falharam. Inclusive alguns dos matemáticos citados neste texto. Muitos concluíram que talvez fosse um feito impossível.

Uma criança chamada Andrew Wiles, na Inglaterra, um dia leu sobre esse teorema. E eis que despertou seu fascínio pela Matemática, algo que muitos consideram impossível: será que conseguimos apreciar e entender a matemática de um dia para outro?

Andrew decidiu que iria demonstrar o último teorema de Fermat e, desde então, seus esforços eram para aprender e se aprimorar no estudo da Matemática. Após um longo trabalho, ele obteve sucesso e, em 1994, ele demonstrou que o teorema era verdadeiro.

Outra situação que parecia ser impossível de solucionar foi resolvida recentemente por Andrew Booker e Andrew Sutherland, da Universidade de Bristol. Com o auxílio de recursos computacionais, conseguiram resolver um enigma que há mais de sessenta anos estava sem resposta.

O desafio consistia em, a partir da equação diofantina $x^3 + y^3 + z^3 = k$, encontrar os valores de x, y e z para k percorrendo todos os números inteiros de 1 a 100.

Três valores de k elevaram muito a dificuldade do desafio, pois por muito tempo não se encontrava a solução. Os números eram 32, 33 e 42. Para o número 32, descobriram que não há solução. Ou seja, não existem x, y e z que elevados ao cubo e somados resultem em 32. Para o 33, a partir de um algoritmo, Andrew Booker conseguiu solucionar o problema, restando apenas o número 42, que só foi possível ser solucionado com a ajuda de Sutherland.

Os valores envolvidos nas soluções são tão diferentes do comum que, provavelmente, estavam fora do alcance da mente humana e apenas um computador conseguiria realizar esse feito.

Assim, podemos observar que, com o passar do tempo e com métodos mais avançados de estudo, de verificação, de estruturação, é possível questionar se algo é difícil ou se simplesmente é impossível ou, até mesmo, observar o contrário: derrubar a crença de que algo é impossível, descobrindo como ultrapassar as dificuldades para se chegar aos objetivos desejados.

Rafael da Gama Cavallari é bacharel e licenciado em Matemática pela Unicamp e mestre em Educação Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo. Apaixonado por matemática e por jogos, atua como professor de Ensino Médio e Superior na região da Grande SP.

SUA OPINIÃO

HORA DE ARTICULAR SUAS IDEIAS

1. O Paradoxo do mentiroso envolve uma situação que não pode ser definida como verdadeira ou falsa. Agora é sua vez: escreva algum outro paradoxo que tenha essa mesma propriedade, analisando por que ele não poderia ser nem verdadeiro nem falso.

2.

> Perelman recebeu nova chuva de ofertas – de prêmios, cargos, honras, pagamentos em dinheiro, convites para conferências e fundos de pesquisa –, as quais considerou, segundo relatos, profundamente ofensivas.
>
> [...]
>
> "Se a teoria está correta, não necessita de outro tipo de reconhecimento", afirmou Perelman.

BBC. Grigori Perelman, o gênio que resolveu um dos maiores problemas matemáticos do milênio e 'sumiu do mapa'. **G1**. Disponível em: <https://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2019/06/10/grigori-perelman-genio-que-resolveu-um-dos-maiores-problemas-matematicos-do-milenio-e-sumiu-do-mapa.ghtml>. Acesso em: 13 out. 2019.

Segundo relatos, Grigori Perelman não aceita prêmios por seus trabalhos porque entende que a Matemática é superior a isso. Dessa forma, surge o questionamento: até que ponto o dinheiro se faz importante de forma a se renunciar às suas convicções? Faça um pequeno relato sobre o que você acha da afirmação de Perelman e do questionamento colocado. Justifique sua resposta com exemplos e situações que corroborem seu ponto de vista.

3. Com base na história de Andrew Wiles, pense em um tópico de matemática que você tenha alguma dificuldade. A seguir, busque descobrir um motivo para aprender esse tópico e, na sequência, elabore um plano de estudos que você julgue eficiente para alcançar seu objetivo. Justifique cada uma de suas escolhas.

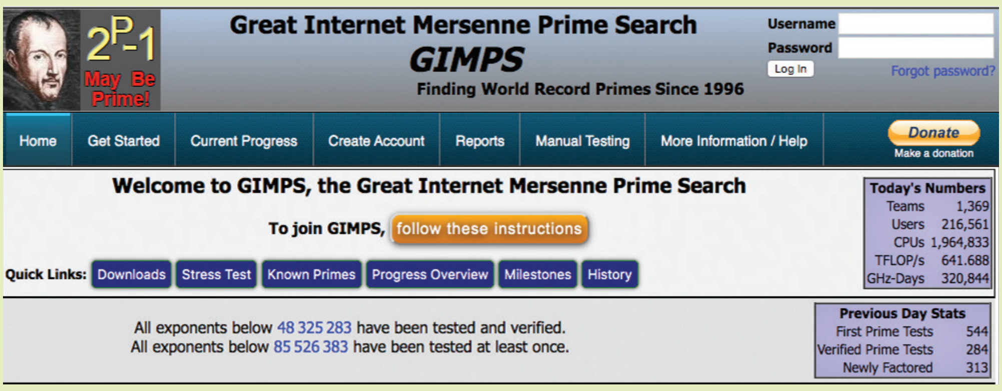
ENCONTRANDO NÚMEROS PRIMOS DE MERSENNE

Outro tema da Matemática que desperta bastante curiosidade e envolve um trabalho árduo é a busca por números primos.

Os números primos são muito usados em programas que utilizam criptografia e não existe um algoritmo ou uma fórmula que possibilite encontrá-los. Em razão disso, as descobertas de novos números primos são remuneradas.

A *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS) é uma organização que busca por números primos de Mersenne, que são expressos por:

$2^p - 1$, em que p é um número primo.

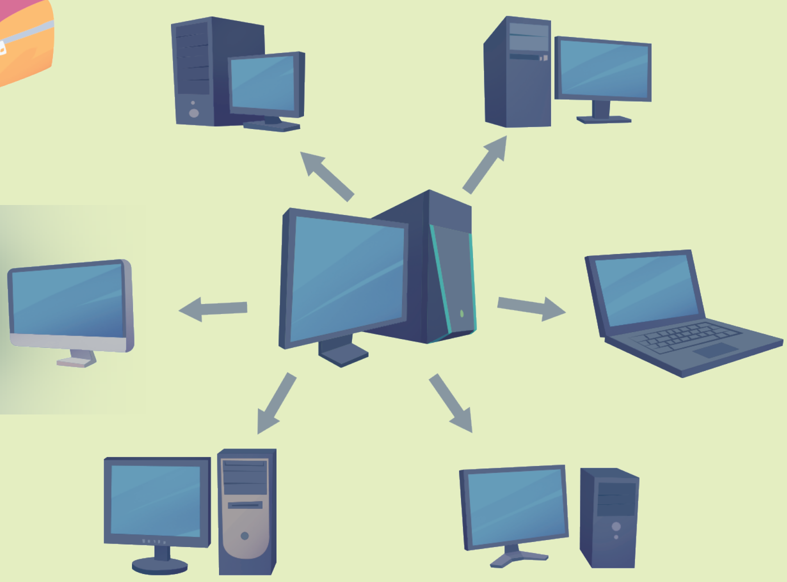


Página inicial do portal GIMPS.

O último número primo de Mersenne encontrado tem, aproximadamente, 25 milhões de algoritmos e foi descoberto em 2018, resultando em um prêmio de 11 mil dólares a Curtis Cooper. Já fazia cinco anos que o último número primo tinha sido encontrado.

Observe como é feita a busca pelos números primos.

1. O usuário baixa o *software* desenvolvido pela GIMPS e inicia seu funcionamento em seu computador.



2. O programa divide a tarefa em subtarefas para outros computadores, que são responsáveis pelos cálculos necessários para o algoritmo de busca de primos.

3. Durante o processo, que dura meses, os computadores vão reunindo as informações encontradas, disponibilizando-as ao usuário inicial.

4. Se o trabalho for concluído com sucesso, obtém-se o número primo de Mersenne. É um trabalho que exige muito da capacidade operacional do computador, portanto o trabalho é bastante demorado, difícil e custoso.

CON
FIRA

SUGESTÕES
DE RESPOSTAS
DO EDITORIAL

1. Resposta pessoal. Alguns exemplos de resposta:
Esta afirmação é falsa.
A próxima frase é verdadeira. A frase anterior é falsa.

2. Resposta pessoal. As respostas dadas podem variar de acordo com o ponto de vista de cada estudante sobre o que acham certo: alguns defenderão que Perelman poderia entender que o dinheiro é um prêmio merecido, enquanto outros defenderão que sua atitude foi correta.

3. Resposta pessoal.
Exemplo de resposta:
Tópico escolhido: funções.
Justificativa: dificuldade em compreender os enunciados e interpretar os gráficos.
Motivação: aprovação em Medicina.
Plano de estudos: estudar com mais calma por 30 minutos diários, resolvendo sempre algum exercício teórico e outro contextualizado.

Conteúdos abordados:
- Resolução de problemas
- Geometria
- Teoria da Relatividade
- Último Teorema de Fermat
- Números primos

O **Articulação MT** tem como objetivo discutir temas relevantes ligados à Matemática e suas Tecnologias. Os conteúdos abordados são analisados à luz dessa ciência, contudo ela não é condição prévia indispensável para a compreensão dos temas. O **Articulação MT** visa estimular o interesse pela Matemática, a fim de que os estudantes a percebam nos fatos noticiados, despertando, assim, o gosto pela aquisição e pela construção de novos conhecimentos.

ARTICULAÇÃO

MATEMÁTICA

NOVEMBRO | 2019 EDIÇÃO Nº 9

FTD EDUCAÇÃO

Diretor de conteúdo e negócios
Ricardo Tavares de Oliveira

Diretor adjunto de Sistema de Ensino
Cayube Galas

Gerente editorial
Júlio César D. da Silva Ibrahim

Gerente de produção e *design*
Letícia Mendes de Souza

Editoras
Cláudia Pedro Winterstein
Denise Favaretto

Editoras assistentes
Ana Olívia Ramos Pires Justo
Susi Aparecida Reis Gil Noaves

Colaborador
Lucas de Souza Santos

Coordenador de eficiência e *analytics*
Marcelo Henrique Ferreira Fontes

Supervisora de preparação e revisão
Adriana Soares de Souza

Preparação e revisão
Equipe FTD

Coordenadora de imagem e texto
Márcia Berne

Pesquisa
Equipe FTD

Gerente de produção e *design*
Letícia Mendes de Souza

Coordenadora de arte
Daniela Máximo

Supervisor de arte
Fabiano dos Santos Mariano

Projeto gráfico
Bruno Attilli

Editora de arte
Adriana Maria Nery de Souza

Créditos das imagens:
p.1. Montagem Editoria de arte; p.2. Editoria de arte; p3. Editoria de arte; p.5. Coleção particular, Editor Unesp;
p.6. Georgios Kollidas/Shutterstock.com, vkilikov/Shutterstock.com; p.7. vchal/Shutterstock.com; p.8. Editoria de arte;
p.9. Marzolino/Shutterstock.com; p.10. Acervo pessoal;
p.12. Montagem do infográfico: Alan Carvalho, https://www.mersenne.org/, Editoria de arte